Lycée Youssef Ben Tachfine	Devoir surveillé 4	Prof : Mohamed EZZAROUALI
Niveau : 2BSMF	Durée : 2 h	Année scolaire : 2017/2018

Exercice 1 (8 points) : Les question de cet exercice sont indépendantes

1) On considère le nombre complexe : $z = -\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$
   a) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z^2 .
   b) En déduire le module et l'argument du nombre complexe .

2) a)Soit x un réel ; en utilisant les formules d'Euler ;montrer que : $\cos^2 x \sin^3 x = \frac{-1}{16}(\sin 5x - \sin 3x - 2\sin x)$.
   b) En déduire les fonctions primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$.

3) Soient u et v deux nombres compexes tels que $|u| = |v| = 1$. Montrer que : $\frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$.

4) a)Soit $n \in \mathbb{N}$; on pose : $z_n = \frac{1}{2}((1+i)^n + (i-1)^n)$; Montrer que : $z_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) e^{i\frac{n\pi}{2}}$
   b) En déduire que : $z_{2018} \in \mathbb{R}$

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé et direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit A le point d'affixe $1+ic$ et B d'affixe $1-ic$ avec c un nombre complexe non nul.

1) Montrer que : les points O ; A et B sont alignés, si et seulement si, $\mathrm{Re}(c)$=0 .
2) Montrer que : $(OA) \perp (OB)$, si et seulement si, $|c| = 1$.
3) On pose : $c = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
   a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}); 1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1 - e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$.
   b) En déduire la forme trigonométrique des deux nombres complexes : $1+ic$ et $1-ic$.
   c) Déterminer la valeur de c pour que OAB soit un triangle rectangle et isocèle en O.

Exercice 3(4 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$

1) Montrer que la fonction u définie par : $u(x) = xe^{2x}$ est une solution particulière de l'équation (E).
2) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
3) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ .Montrer que la fonction f est une solution de l'équation (E) ,si et seulement si , la fonction $(u-f)$ est une solution de l'équation différentielle (E') .
4) En déduire les solutions de l'équation (E) .
5) Déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie : $g(0) = 1$.

Exercice 4 (3 points)

1) Discuter selon les valeurs du réel m l'ensemble de solutions de l'équation : (E_m) : $y'' - my' + my = 0$
2) Trouver la solution f de l'équation (E_4) dont la courbe passe par le point $A(0;-2)$ et admet dans ce point une tangente de pente 1.